OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. La un concurs de matematică sunt propuse 30 de exerciţii. Pentru fiecare exerciţiu rezolvat corect elevul primeşte 10 puncte, iar pentru fiecare exerciţiu rezolvat greşit este penalizat cu 10 puncte (se scad 10 puncte). Dragoş a rezolvat toate exerciţiile şi a primit 80 de puncte.

a) Câte exerciţii a rezolvat corect Dragoş?

b) Câte exerciţii a rezolvat greşit Dragoş?

c) Câte exerciţii ar mai fi trebuit să rezolve corect Dragoş, pentru ca în final el să obţină 120 puncte?

d) Care a fost punctajul maxim care se putea obţine la concursul de matematică?

PROBLEMA 2. Fie numerele $x = 1+2+2^2+\ldots+2^{2014}$ şi $y = (27^3 : 3^8+10^{10} : 10^8-72)^{403}-2015^0$.

a) Arătaţi că $x = 2^{2015} - 1$;

b) Comparaţi numerele x şi y;

c) Aflaţi ultima cifră a numărului $x + y$.

PROBLEMA 3. Determinaţi câte numere de forma $\overline{abc}$, cu cifre distincte, verifică relaţia:

$$\overline{aba} - \overline{aaa} + 17\,(b - a) = c^3.$$

PROBLEMA 4. Se consideră şirul cu termenii: $1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17, 20, \ldots$

a) Scrieţi următorii 2 termeni ai şirului;

b) Determinaţi al 2015-lea termen al şirului;

c) Calculaţi suma termenilor mai mici sau egali cu 80 din şir.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. a) Să se determine valoarea numărului x, dacă

$$\frac{2014}{2015\cdot 2015-2015-2015+1}=\frac{x}{2014\cdot 2015}.$$

b) Folosind inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$, oricare ar fi a şi b pozitive şi diferite, să se arate că

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{499}+\frac{1}{500}>\frac{13}{7}.$$

PROBLEMA 2. Se consideră numerele naturale $a=3n+7$, $b=2n+5$ şi $c=n+2$, unde $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că numerele a şi b sunt prime între ele, iar numărul $[a,b]+[a,c]$ este pătrat perfect. ($[x,y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y)

PROBLEMA 3. Se dau punctele coliniare A, O, şi B, cu $O\in(AB)$. De aceeaşi parte a dreptei AB se consideră punctele C şi D, astfel încât unghiurile $\widehat{AOC}$ şi $\widehat{COD}$ să fie adiacente. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ şi $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Se ştie că $\mathrm{m}\left(\widehat{MOD}\right)=105^\circ$ şi $\mathrm{m}\left(\widehat{NOC}\right)=120^\circ$.

a) Arătaţi ca unghiul $\widehat{COD}$ este drept.

b) Dacă în interiorul unghiului $\widehat{COD}$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule, demonstraţi că printre acestea există cel puţin două unghiuri congruente.

PROBLEMA 4. a) Considerăm punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2015}$ (în această ordine), astfel încât $A_0A_1=1$ cm, $A_1A_2=2$ cm$, ...,$ $A_{2014}A_{2015}=2015$ cm. Să se calculeze distanţa dintre punctele A_{1000} şi A_{2015}.

b) Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte, astfel încât oricare trei dintre punctele date sunt necoliniare. Colorăm fiecare dintre segmentele determinate de ele, fie cu portocaliu, fie cu violet, la întâmplare. Demonstraţi că există un triunghi cu vârfurile în trei dintre cele şase puncte, care are toate laturile de aceeaşi culoare.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. a) Să se arate că numărul $A = \sqrt{2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2}$ este iraţional pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se demonstreze că dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x + y + z = 1344$, atunci

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leqslant 2016.$$

PROBLEMA 2. a) Să se arate că $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) Determinaţi numerele naturale a, b şi numărul natural prim p, ştiind că $a^2 + a = p^{2^b} + 2$.

PROBLEMA 3. Fie ABCD un paralelogram cu $AB = n \cdot AD$, unde $n \in \mathbb{R},\ n > 2$. Bisectorele unghiurilor paralelogramului se intersectează astfel: bisectoarea unghiului A se intersectează cu bisectoarea unghiului B în punctul R, bisectoarea unghiului B cu bisectoarea unghiului C în S, bisectoarea unghiului C cu bisectoarea unghiului D în T şi bisectoarea unghiului D cu bisectoarea unghiului A în Q.

a) Demonstraţi că $RSTQ$ este dreptunghi;
b) Dacă $AB \cap DT = \{P\}$, demonstraţi că $\frac{A_{ADP}}{A_{ARB}} = \frac{2}{n^2}$;
c) Demonstraţi că dreptele $RT,\ AC$ şi DB sunt concurente.

PROBLEMA 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[BD$, $[CE$ bisectoarele sale ($D \in AC$, $E \in AB$). Se notează cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F, respectiv G, proiecţiile punctelor D şi E pe dreapta BC. Să se determine măsura unghiului FIG.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. a) Descompuneţi în factori $3x^2+4\sqrt{6}x+8-y^2$.

b) Aflaţi minimul şi maximul expresiei $\dfrac{x+1}{|x+1|}+\dfrac{|x+2|}{x+2}+\dfrac{x+3}{|x+3|}$, pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,-1\}$.

PROBLEMA 2. Fie $a,b\in\mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{\dfrac{a+5}{a+12}},\sqrt{\dfrac{b+3}{b+14}}\in\mathbb{Q}$. Arătaţi că $a^{2015}+b^{2015}$ nu se divide cu 2015.

PROBLEMA 3. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul S exterior planului său aşa încât $SA=SB=SC=SD$. Dacă $AB=12$ cm, $AP\perp CS$, $P\in(SC)$ şi $AP=SO$, unde O este centrul pătratului, se cer:

a) Măsura unghiului format de dreptele SC şi BD;

b) Distanţa de la punctul A la planul (BPD);

c) Distanţa de la punctul B la dreapta de intersecţie a planelor (BPD) şi (ADS).

PROBLEMA 4. Se consideră punctele necoplanare A,B,C şi D. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, D este ortocentrul triunghiului BCD, iar picioarele perpendicularelor din D şi A pe BC coincid, notând cu E piciorul perpendicularei din A pe BC, să se arate că $HE\cdot AE=DE^2$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.